PARTE 3
INTEGRALI E APPLICAZIONI ALLA PROBABILITÀ E STATISTICA

INTRODUZIONE AGLI INTEGRALI

INTEGRALE ALLA RIEMANN

CALCOLO DI AREE (LIMITE DI SOMME DI AREE DI RETTANGOLI)

APPLICAZIONI IN PROBABILITÀ E STATISTICA

(insieme all' <u>INTEGRALE GENERALIZZATO</u> o IMPROPRIO)

DISTRIBUZIONE NORMALE DI GAUSS

(con l'esempio del tiro al bersaglio)

FUNZIONE GAMMA

L' INTEGRALE DELLA STATISTICA o PROBABILITY INTEGRAL

INTEGRALE GENERALIZZATO: ESTENSIONE DELL' INTEGRALE ALLA RIEMANN A FUNZIONI ILLIMITATE E/O A INTERVALLI ILLIMITATI

COME SI CALCOLANO GLI INTEGRALI ALLA RIEMANN?

CLASSE DELLE PRIMITIVE (o ANTIDERIVATE), CIOÈ INTEGRALE ALLA NEWTON

+

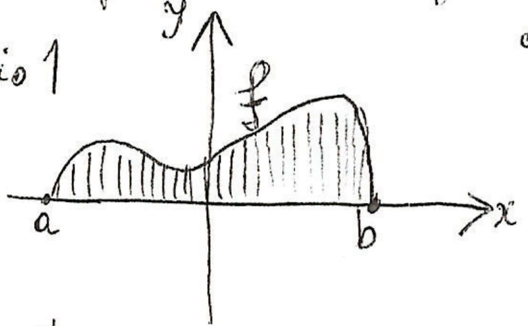
FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE (COLLEGAMENTO PROFONDO TRA L'INTEGRALE ALLA RIEMANN E QUELLO ALLA NEWTON)

INTEGRALE ALLA RIEMANN

Integrale come aree di figure geometriche (se si tratta di integrali di funzioni f non negative)

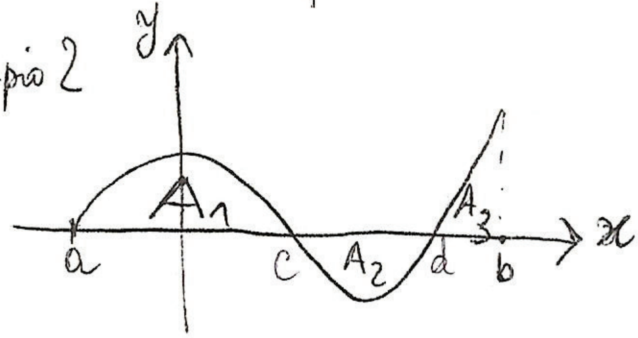
[N.B.: se la f ha una parte negativa, nel calcolo dell' integrale di f quella parte di area corrispondente va presa con il segno − anziché col segno + :

esempio 1



area della figura tratteggiata $= \int_a^b f(t)\,dt$

esempio 2



area della figura A_1 − area A_2 + area $A_3 = \int_a^b f(t)\,dt$: infatti

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^d f(t)\,dt + \int_d^b f(t)\,dt =$$

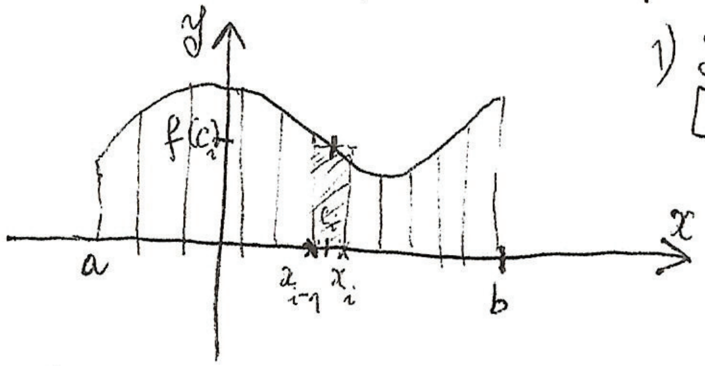
(l' integrale è positivo e anche l'area) (area positiva ma integrale negativo.) (area positiva e integrale positivo)

= area A1 − area A_2 + area A3,

perché L' AREA È UNA GRANDEZZA SEMPRE POSITIVA mentre l' integrale, nella figura dell' esempio 2, è positivo negli intervalli dove la funzione è positiva, ed è negativo nell' intervallo dove la funzione è negativa.

Per semplificare le idee, facciamo la visualizzazione geometrica dell'integrale nel caso di una funzione $f \geq 0$.

INTEGRALE ALLA RIEMANN COME LIMITE DI SOMME DI AREE DI RETTANGOLINI



1) Si divide l'intervallo $[a,b]$ in n parti uguali $[x_{i-1}, x_i]$, per i che va da 1 a n

2) Si prende un punto a piacere $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$

3) Si considera la quantità $(x_i - x_{i-1}) \cdot f(c_i)$, che è l'area del rettangolino avente base il segmento che va da x_{i-1} ad x_i e per altezza $f(c_i)$

4) Si fa la somma $S_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(c_i)$, cioè LA SOMMA DELLE AREE DEI RETTANGOLINI

5) Si considera il limite $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$.

Se questo limite esiste ed è finito, si pone $\int_a^b f(t)\,dt = S$ e si dice che f è INTEGRABILE ALLA RIEMANN in $[a,b]$ ((R)-$\int$bile, in breve) con integrale S.

o (R)-integrabile

Esempi (senza dimostrazione)

1) Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è <u>continua</u> in $[a,b]$, allora f è (R)-integrabile in $[a,b]$, ma non viceversa.

2) Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è <u>non-decrescente</u> (o <u>strettamente crescente</u>) in $[a,b]$, oppure <u>noncrescente</u> (o <u>strettamente decrescente</u>) in $[a,b]$, allora f è (R)-integrabile in $[a,b]$, ma non viceversa.

3) Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è (R)-integrabile in $[a,b]$, allora f è <u>LIMITATA</u> in $[a,b]$ (cioè esistono due numeri <u>REALI</u> M_* ed M^* tali che $M_* \leq f(x) \leq M^*$ per ogni $x \in [a,b]$), ma non è vero il viceversa, || cioè esistono funzioni $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ che sono <u>limitate</u> in $[a,b]$ ma che <u>non</u> sono <u>(R)-integrabili</u> in $[a,b]$ ||

COME SI CALCOLANO GLI INTEGRALI?

COLLEGAMENTO MOLTO PROFONDO FRA L' INTEGRALE ALLA RIEMANN E L' ESISTENZA DI PRIMITIVE (o ANTIDERIVATE)

(Una primitiva P di f è una funzione la cui derivata P' è f)

a) TEOREMA DI TORRICELLI – BARROW:

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora f ammette primitive, e una primitiva di f è

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (ha senso perché, se f è (R)-integrabile in $[a,b]$, allora f è (R)-integrabile in $[a,x]$ per ogni x con $a < x < b$) (F si chiama FUNZIONE INTEGRALE)

b) FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, e sia $P : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f. Allora

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = P(b) - P(a)}$$

(N.B.: In un intervallo, o semiretta, o tutto $\mathbb{R}$, DUE (QUALSIASI) PRIMITIVE (quando esistono) DIFFERISCONO PER UNA COSTANTE)

LA CLASSE DELLE PRIMITIVE DI f (quando ci sono) si chiama <u>INTEGRALE INDEFINITO</u> di f oppure <u>INTEGRALE ALLA NEWTON</u> di f

<u>REGOLA FONDAMENTALE</u> (di nome e di fatto!)

Per calcolare l'integrale alla RIEMANN $\int_a^b f(t)\,dt$ (con f continua in $[a,b]$) (che si chiama anche INTEGRALE DEFINITO):

$\boxed{1)}$ Si calcola l'<u>integrale INDEFINITO alla NEWTON</u> (la classe delle <u>PRIMITIVE</u>)

2) Si applica la FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Esempio: $\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = I$ Una primitiva P di $\cos t$ è $P(t) = \sin t$, perché $P'(t) = \cos t$ per ogni $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Si ha: $I = P(\frac{\pi}{2}) - P(0) = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$. Si scrive anche

$\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$.

(si legge «seno di t calcolato tra $\frac{\pi}{2}$ e 0»)

N.B.: Esistono funzioni che ammettono primitive ma che non sono integrabili alla Riemann. Esistono anche funzioni che sono integrabili alla Riemann ma non ammettono primitive (cioè non sono integrabili alla Newton)

(N.B.: Primitiva = come una funzione "inversa" della derivata, detto in modo "semplice")

Allora, nel <u>CALCOLO</u>, tutto si riconduce al CALCOLO DELL' <u>INTEGRALE INDEFINITO</u>, e quindi al <u>CALCOLO DELLE PRIMITIVE</u>.

COME SI CALCOLA L'INTEGRALE INDEFINITO?

Teniamo presente che l'integrale indefinito è la classe delle primitive, quindi delle "antiderivate". Quindi, come prima cosa, si vede se la funzione che è "sotto il segno di integrale" può essere riconosciuta come la derivata di un'altra funzione fin da subito, immediatamente: questo è il caso degli INTEGRALI IMMEDIATI, che sono quindi i più facili da calcolare. Per riconoscere un integrale immediato dobbiamo riconoscere una funzione come la derivata di un'altra funzione, e quindi dobbiamo avere MOLTA PADRONANZA, DIMESTICHEZZA, con le derivate.

Adesso formuliamo la "tabellina" degli INTEGRALI IMMEDIATI (che derivano dalle corrispondenti derivate): quindi RIPASSARE MOLTO BENE LE DERIVATE!!) Gli integrali immediati ce li ricaviamo dalle derivate; le derivate le ricaviamo come dimostrazione di esercizi nella Parte 2 testo adottato - derivate; quindi IMPARARE IL MENO POSSIBILE A MEMORIA!!!

Teniamo presente che:

1) "L'integrale della somma è la somma degli integrali"
2) "L'integrale della differenza è la differenza degli integrali"
3) Una qualsiasi costante reale moltiplicativa k può essere portata dentro o fuori dal segno dell'integrale.

N.B.: L'integrale del prodotto NON È UGUALE al prodotto degli integrali!!!

TABELLINA DEGLI INTEGRALI IMMEDIATI

$$\boxed{\int x^b\,dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + c \quad \text{se } b \neq -1}$$

perché $\boxed{D\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}+c\right)} = D\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right) + D(\overset{0}{c}) = \frac{1}{b+1}\cdot D(x^{b+1}) =$

$= \frac{1}{\cancel{b+1}}\cdot\cancel{(b+1)}\,x^b = \boxed{x^b}$. Come caso particolare, per $b=0$, si ha

$\boxed{\int dx = \int 1\cdot dx = x + c}$ infatti $D(x+c) = D(x) + D(c) = 1 + 0 = 1$

Inoltre, per ogni $k \in \mathbb{R}$, si ha: $\boxed{\int k\,dx = k\int 1\cdot dx = kx + c}$.

$\boxed{\int e^x\,dx = e^x + c}$ perché $D(e^x) = e^x$

$\boxed{\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c}$ $(a>0, a\neq 1)$, perché $D\left(\frac{a^x}{\ln a}+c\right) =$

$= D\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) + D(\overset{0}{c}) = \frac{1}{\ln a}\,D(a^x) = \frac{1}{\cancel{\ln a}}\cdot a^x\cdot\cancel{\ln a} = a^x$

$\boxed{\int \cos x\,dx = \sin x + c}$ perché $D(\sin x) = \cos x$

$\boxed{\int \sin x\,dx = -\cos x + c}$ perché $D(\cos x) = -\sin x$, e quindi $D(-\cos x) = \sin x$

$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c}$ perché $D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$ (integrale MOLTO USATO)

$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c}$ perché $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (dove ha senso)

$\boxed{\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcocos} x + c}$ perché $D(\operatorname{arcocos} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dove ha senso

Rientrano fra gli integrali sostanzialmente immediati anche le combinazioni lineari di funzioni che si integrano con integrali immediati, tenendo conto delle regole

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int k\, f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{R}$$

Esempio: $\int (x^2 + 10x^4)\,dx = \int x^2\,dx + 10 \int x^4\,dx = \frac{x^3}{3} + \cancel{10}^{2} \frac{x^5}{\cancel{5}} + c = \frac{x^3}{3} + 2x^5 + c$ [Prova: $D\left(\frac{x^3}{3} + 2x^5 + c\right) = \frac{1}{3} D(x^3) + 2D(x^5) + \overset{0}{D}(c) = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} + 10x^4 = x^2 + 10x^4$, come volevamo dimostrare]

Adesso consideriamo gli integrali cosiddetti "quasi immediati", che sono del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ oppure $\int \varphi'(w(x))\,w'(x)\,dx$.

Nel primo caso, si applica la formula (con $f(x) \neq 0$)

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c}$$

che ha come caso particolare

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c} \quad \text{IMPORTANTISSIMO}$$

cioè, "quando il numeratore è uguale alla derivata del denominatore, l'integrale indefinito è uguale al logaritmo del valore assoluto del denominatore $+c$"

(REGOLA FONDAMENTALE !!!)

Esempi:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,dx \overset{\text{TRUCCO}}{=} \int \frac{1/x}{\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + c \qquad \int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + c \quad (D(\sin x) = \cos x)$$

Facciamo la prova della formula

$$(\overset{+}{\underset{*}{\circ}}) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c \qquad (\text{con } f(x) \neq 0),$$

cioè calcoliamo $D(\ln|f(x)|)$ distinguendo due casi: I) $f(x) > 0$ II) $f(x) < 0$.

Nel caso I), si ha $D(\ln|f(x)|) = D(\ln(f(x)))$, in quanto $|f(x)| = f(x)$ per $\boxed{f(x) > 0}$ (e in generale NON per $x > 0$, altrimenti sarebbe un errore molto grave!)

Calcoliamo $D(\ln(f(x)))$: poniamo come funzione "interna" $w(x) = f(x)$, la cui derivata è $w'(x) = f'(x)$, e come funzione "esterna" $\varphi(w) = \ln(w)$, la cui derivata è $\frac{1}{w}$, che calcolata nel punto $w(x) = f(x)$ diventa $\frac{1}{f(x)}$. Per la formula di derivazione delle funzioni composte, si ha $\boxed{\varphi'(w(x)) = \frac{1}{w(x)} = \frac{1}{f(x)}}$

$$\boxed{D(\ln(f(x)))} = \varphi'(w(x)) \cdot w'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \boxed{\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Si ritrova la funzione che è sotto il segno di integrale, quindi i conti tornano (!)

Nel caso II) si ha $D(\ln|f(x)|) = D(\ln(-f(x)))$, in quanto $|f(x)| = -f(x)$ per $\boxed{f(x) < 0}$. Calcoliamo $D(\ln(-f(x)))$: poniamo come funzione "interna" $w(x) = -f(x)$, la cui derivata è $w'(x) = -f'(x)$, e come funzione "esterna" $\varphi(w) = \ln(w)$. Si ha: $\varphi'(w) = \frac{1}{w}$, quindi $\varphi'(w(x)) = \frac{1}{w(x)} = -\frac{1}{f(x)}$.

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$D(\ln(-f(x))) = \varphi'(w(x)) \cdot w'(x) = -\frac{1}{f(x)} \cdot (-f'(x)) = \boxed{\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Si ritrova la funzione sotto il segno di integrale, e siamo a posto. Quindi abbiamo fatto la prova della formula $(\overset{+}{\underset{*}{\circ}})$.

Consideriamo ora gli integrali del tipo

$$\boxed{***} \quad \int \varphi'(w(x)) \cdot w'(x)\, dx = \varphi(w(x)) + c = (\varphi \circ w)(x) + c \quad \boxed{***}$$

Anche questi integrali sono chiamati quasi immediati, e sono una conseguenza ("quasi immediata"!) del teorema di derivazione delle funzioni composte.

Quand'è che è possibile usare la formula $\boxed{***}$?

Quando SIAMO IN PRESENZA DI UNA FUNZIONE $w = w(x)$ che è DENTRO UN'ALTRA FUNZIONE $\varphi' = \varphi'(w)$ e questa quantità $(\varphi'(w(x)))$ VIENE MOLTIPLICATA PER LA DERIVATA DELLA FUNZIONE w $(w'(x))$.

Esempio $\boxed{I_1 = \int \sin(x^2) \cdot 2x\, dx}$ I_1 è un integrale quasi immediato (del 2° tipo; del 1° tipo è invece "quando il numeratore è la derivata del denominatore"), perché: c'è una funzione (x^2) $(w(x) = x^2)$ che:

a) "COMPARE" dentro un'altra funzione (φ') (φ' è il seno in questo esempio)

b) viene moltiplicata per la sua (stessa) derivata $(2x)$

La formula $\boxed{***}$ ci dice che il risultato dell'integrale I_1 sarà «l'integrale della funzione φ' (cioè in sostanza la φ) calcolato nel punto $w(x)$, cioè $\varphi(w(x))$, $(+c)$», vale a dire, nel nostro caso, l'integrale della funzione seno (cioè il "meno coseno") calcolato nel punto x^2, cioè $\boxed{-\cos(x^2) + c}$ I passi a) e b) di cui sopra ci permettono di "svelare" che qui c'è "nascosto" il TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE.

Altro esempio: $I_2 = \int [\cos(e^x)] \cdot e^{x+2}\, dx$

~~Innanzi~~ Tutto osserviamo che, per le proprietà delle potenze, $e^{x+2} = e^x \cdot e^2$, e quindi siamo in presenza di una costante moltiplicativa, che può essere portata fuori dal segno di integrale (che è e^2)

Allora $I_2 = e^2 \cdot \int [\cos(e^x)] \cdot e^x\, dx$

Sia $J_2 = \int [\cos(e^x)] \cdot e^x\, dx$

Eccoci davanti a un integrale quasi immediato! Come si riconosce? C'è e^x (che è "dentro" la funzione coseno), e poi la quantità $\cos(e^x)$ viene MOLTIPLICATA per la derivata di e^x (che è e^x) Ci siamo! Allora la funzione che sta sotto il segno di integrale (che, in letteratura, si chiama FUNZIONE INTEGRANDA) è del tipo $\psi(w(x)) \cdot w'(x)$ (ove ψ è il coseno, $w(x) = e^x$). Per arrivare alla formula di derivazione delle funzioni composte $\boxed{\varphi'(w(x)) \cdot w'(x)}$ poniamo $\boxed{\psi = \varphi'}$ cioè facciamo "l'integrale della funzione ψ": nel nostro caso "l'integrale del coseno è il seno, perché la derivata del seno è il coseno". Pertanto φ è il seno. Ma l'espressione $\boxed{\varphi'(w(x)) \cdot w'(x)}$ è la derivata della funzione composta $\varphi \circ w$, quindi $\int \varphi'(w(x)) \cdot w'(x)\, dx$ è uguale proprio alla stessa funzione composta $(\varphi \circ w)(x) + c$, cioè $\varphi(w(x)) + c$, cioè, nel nostro caso, $J_2 = \sin(e^x) + c$.

Quindi $I_2 = e^2 \cdot \sin(e^x) + c$ (n.b.: $e^2 \cdot c$ è la stessa cosa che c, è sempre una costante...)

Terzo esempio: $I_3 = \int (\sin^2 x) \cdot \cos x \, dx =$

$= \int (\sin x)^2 \cdot \cos x \, dx$

La funzione integranda è costituita dal PRODOTTO di una funzione che contiene il seno per la stessa derivata del seno, che è il coseno. Quindi come funzione "interna" w prendiamo $w(x) = \sin x$. La funzione che contiene il seno è $\boxed{(\sin x)^2}$ (perché $\sin^2 x = (\sin x)^2$, come anche $\ln^2 x = (\ln x)^2$, eccetera ...),

e quindi poniamo $\psi(w) = w^2$, ossia $\varphi'(w) = w^2$.
Per ottenere la φ, allora faremo l'integrale della ψ, cioè
$\varphi(w) = \int \psi(w) \, dw = \int w^2 dw = \frac{w^3}{3} + c$.
Prenderemo allora $\varphi(w) = \frac{w^3}{3}$. Allora si ha:
$\boxed{(\sin x)^2 \cdot \cos x} = (w(x))^2 \cdot w'(x)$ (perché $w(x) = \sin x$, e quindi $w'(x) = \cos x$) $= \psi(w(x)) \cdot w'(x) =$
$= \varphi'(w(x)) \cdot w'(x) =$ (per il teorema di derivazione delle funzioni composte) $= D(\varphi \circ w)(x) = D\left(\frac{w(x)^3}{3}\right) =$
$= \boxed{D\left(\frac{(\sin x)^3}{3}\right) = D\left(\frac{\sin^3 x}{3}\right)}$, da cui

$$\boxed{I_3 = \int (\sin x)^2 \cdot \cos x \cdot dx = \frac{(\sin x)^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c.}$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

Non tutti gli integrali possono essere risolti come integrali immediati o quasi immediati o loro combinazioni lineari.
Ci sono comunque altre tecniche, altre regole, altri "trucchi".
Adesso parliamo dell'integrazione <u>per parti</u>, che si usa spesso nei seguenti casi:

a) - integrale di un prodotto (che in generale NON È il prodotto degli integrali) (per esempio $\int x e^x dx$)

b) - integrale di una funzione "da sola" CHE NON RIENTRA NELLA TABELLINA DEGLI INTEGRALI IMMEDIATI (per esempio $\int \ln x \, dx$, $\int \operatorname{arctg} x \, dx$)

[c) - integrale di una funzione che è la composizione di una funzione di cui al punto precedente con una funzione "molto semplice" o "abbastanza semplice"]

Adesso scriviamo la formula e poi facciamo qualche considerazione.

$$(*) \quad \boxed{\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx}$$

Esercizio: Questa formula deriva dalla formula della derivata del prodotto $D(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$: infatti, quando passiamo all'integrale, tenendo conto che $\int [D(f(x) \cdot g(x))] dx = f(x) g(x) + c$, si ha $f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$, da cui $(*)$.

a) Quando abbiamo il prodotto di due funzioni, il "trucco" è RICONOSCERE UNA DELLE DUE FUNZIONI COME LA DERIVATA DI UN'ALTRA (una terza) FUNZIONE, e DERIVARE L'ALTRA (la seconda) funzione, in modo che L'ESPRESSIONE DELLA DERIVATA DELLA SECONDA FUNZIONE SIA PIÙ SEMPLICE DI QUELLA DELLA SECONDA FUNZIONE, in modo tale che ci si possa ricondurre a un integrale IMMEDIATO o un integrale (possibilmente anche per parti) avente un'espressione più semplice di quella precedente. Per esempio $f(x) = x$, $g(x) = e^x$, calcoliamo $\int x \cdot e^x \, dx$. Qui riconosciamo che e^x è la derivata di e^x, e deriviamo l'altra funzione (x): la derivata di x è 1, che ha un'espressione più semplice di x. Usiamo la formula

$$\boxed{\int f(x) g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx}$$

con $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$, $f'(x) = 1$, ottenendo

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = xe^x - e^x + c$$

[N.B.: Si potrebbe pensare anche che x è la derivata di $\frac{x^2}{2}$, e considerare $f(x) = e^x$, $g'(x) = x$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$, $f'(x) = e^x$, ottenendo

$\int x \cdot e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int e^x \cdot \frac{x^2}{2} dx$, che però non risolve la situazione, perché otteniamo un'espressione più complicata e non più semplice]

Quindi si pensa anche nel seguente modo: $\int x \cdot e^x \, dx$

"facile da derivare" "facile da integrare"

b) Quando abbiamo una funzione "da sola" che non rientra nella tabella degli integrali immediati, per esempio $\ln x$, il trucco è: a) si mette l'1 davanti; b) si considera 1 come la derivata di x; c) si fa la derivata della funzione data (che deve avere un'espressione più semplice della funzione stessa)
Nel caso del logaritmo, si ha $D(\ln x) = \frac{1}{x}$, più facile da "maneggiare".

Ricordiamo $$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx}$$

$f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$, $g(x) = x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, quindi

$$\boxed{\int \ln x\,dx} = \int 1 \cdot \ln x\,dx = \int \ln x \cdot (x)'\,dx = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx =$$
$$= x \cdot \ln x - \int 1 \cdot dx = \boxed{x \cdot \ln x - x + c.}$$

Adesso calcoliamo $\int \operatorname{arctg} x\,dx = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x\,dx = \int (\operatorname{arctg} x) \cdot x'\,dx$.

Poniamo $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g'(x) = 1$, $g(x) = x$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, quindi

$$\boxed{\int \operatorname{arctg} x\,dx} = \int \operatorname{arctg} x \cdot x'\,dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x\,dx \overset{(**)}{=}$$

(Adesso cerchiamo di rendere il numeratore uguale alla derivata del denominatore: si ha $D(1+x^2) = D(1) + D(x^2) = 0 + 2x = 2x$ e non x. Pertanto moltiplichiamo per 2 DENTRO l'integrale, per avere $2x$ al numeratore, e moltiplichiamo per $\frac{1}{2}$ FUORI dall'integrale (la costante moltiplicativa può essere portata dentro o fuori dal segno di integrale a seconda di quello che "è più comodo per noi")

$\overset{(**)}{=}$ $x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \boxed{x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c}$ (Abbiamo usato la formula $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c}$ e tenuto conto che $|1+x^2| = 1+x^2$ perché è sempre positivo)

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

A volte, nella pratica, sembra apparentemente difficile risolvere alcuni integrali del tipo $I_4 = \int \sin(\sqrt{x})\, dx$, oppure $I_5 = \int \frac{e^x}{e^x+1} dx$, in cui non si vede, a prima vista, una strada "immediata". Allora si può provare a fare un "cambio di variabile" (per esempio, $\sqrt{x} = t$, oppure $e^x = w$) e vedere quello che succede, cioè vedere se veramente il nostro integrale viene ricondotto a un integrale più semplice da calcolare.

N. B.: Per questo procedimento, non c'è una regola generale, nel senso che bisogna fare molta, molta pratica e in questo modo si acquisisce la dimestichezza per svolgere gli integrali di questo tipo (è come guidare la macchina: bisogna fare tanto, tanto allenamento).

Allora illustriamo la tecnica dell'integrazione per sostituzione direttamente con esempi.

$I_4 = \int \sin(\sqrt{x})\, dx$ L'idea che può venire in mente è fare la sostituzione

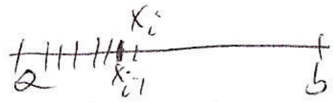
$\boxed{\sqrt{x} = t}$ Qual è allora il metodo dell'integrazione per sostituzione? Che <u>TUTTE</u> LE QUANTITÀ CHE CONTENGONO LA VARIABILE x VANNO RISCRITTE COME ESPRESSIONI CHE CONTENGONO SOLAMENTE LA NUOVA VARIABILE t. <u>Tutto</u> ciò che contiene la x va scritto in termini di t. Allora: se $\sqrt{x} = t$, si ha $x = t^2$ quindi x, vista come funzione di t, diventa $x(t) = t^2$.

Ma allora, come sistemiamo dx? Ecco il "trucco".

1) Intanto, scriviamo $\boxed{dx = \frac{dx}{dt}\cdot dt}$

(Come dire: $2 = \frac{2}{5}\cdot 5$)

2) Adesso: chi è $\boxed{\frac{dx}{dt}}$? Diciamolo in termini intuitivi e senza dimostrazione. Quando scriviamo $\int f(x)\,dx$, dx rappresenta l'incremento della variabile x facendolo diventare piccolo piccolo (nella costruzione con i rettangolini vista all'inizio di questo materiale didattico, c'è la quantità $x_i - x_{i-1}$



quando l'intervallo $[a,b]$ viene diviso in tante parti sempre più piccole ...). Allora dt rappresenta l'incremento della variabile t (facendolo diventare sempre più piccolo). Inoltre, noi stiamo considerando la x come funzione della t (cioè $x = x(t)$). Quindi $\frac{dx}{dt}$ rappresenta il rapporto tra l'incremento della funzione x ($x = x(t)$) e la variabile t, quando questi incrementi diventano piccoli piccoli, cioè quando c'è il "passaggio al limite". Ricordando che "il limite del rapporto incrementale è la derivata" (quando esiste ed è finito, cioè esiste ed è un numero reale), allora si ha $\frac{dx}{dt} = x'(t)$ (cioè la derivata di x rispetto a t), e quindi

$$\boxed{dx = x'(t)\cdot dt}$$

Questa formula va usata SEMPRE, TUTTE LE VOLTE CHE SI FA L'INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE.

Nel nostro caso, $x = x(t) = t^2$, quindi $x'(t) = 2t$, e pertanto $\boxed{dx = 2t\cdot dt}$. Adesso siamo pronti a fare le nostre sostituzioni.

$I_4 = \int \sin(\sqrt{x}) \cdot dx$ $\qquad t = \sqrt{x}$

$x = x(t) = t^2,\ dx = 2t \cdot dt$

Sostituendo, si ha

$I_4 = \int \sin t \cdot 2t \cdot dt =$ (portando la costante moltiplicativa 2 al di fuori del segno dell'integrale) $= 2 \int t \sin t\, dt = 2\, J_4$, ove $J_4 = \int t \cdot \sin t\, dt$.

J_4 è l'integrale di un prodotto, e applicheremo la formula di integrazione per parti. Delle due funzioni t, $\sin t$, quella più "facile da derivare" è t (perché $D(t) = 1$), mentre quella più "facile da integrare" è $\sin t$ (e si ha: $\int \sin t\, dt = -\int (-\sin t)\, dt =$ $= -\cos t + c$: infatti $D(-\cos t) = -D(\cos t) =$ $= -(-\sin t) = \sin t$). Quindi scegliamo: $f(t) = t$, $g'(t) = \sin t$: avremo $f'(t) = 1$, $g(t) = -\cos t$, e ora siamo in grado di applicare la formula di integrazione per parti

$$\boxed{\int f(t) \cdot g'(t)\, dt = f(t) \cdot g(t) - \int f'(t) \cdot g(t)\, dt}$$

si ha:

$J_4 = \int t \cdot \sin t\, dt = \int t \cdot (-\cos t)'\, dt = t \cdot (-\cos t) - \int (-\cos t)\, dt =$ $= -t \cos t + \int \cos t\, dt = -t \cos t + \sin t + c$ (in quanto $D(\sin t) = \cos t$) $=$ ("torniamo" alla x, risostituendo t con $\sqrt{x}$) $= -\sqrt{x} \cdot \cos(\sqrt{x}) + \sin(\sqrt{x}) + c$. Allora $I_4 = 2 J_4 = -2\sqrt{x} \cdot \cos(\sqrt{x}) +$ $+ 2 \sin(\sqrt{x}) + c$ (dire c oppure $2c$ è la stessa cosa, perché la scrittura $+c$ indica una famiglia di costanti arbitrarie)

Calcoliamo ora $\boxed{I_5 = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx}$ per sostituzione. L'idea è quella di prendere $e^x = w$. Allora, $x = \ln w$ (rivedere le funzioni inverse!), e procedendo come nell'esercizio precedente si ha $\boxed{dx = x'(w)\cdot dw}$, cioè $\boxed{dx = \frac{1}{w}\,dw}$, perché $x'(w) = D(\ln w) = \frac{1}{w}$.
Facendo tutte le dovute sostituzioni, otteniamo

$$\boxed{I_5} = \int \frac{\cancel{w}}{w+1}\cdot\frac{1}{\cancel{w}}\,dw = \int \frac{1}{w+1}\,dw = \int \frac{D(w+1)}{w+1}\,dw =$$

$$= \ln|w+1| + c \overset{w=e^x}{=} \ln|e^x+1| + c = \boxed{\ln(e^x+1) + c}$$

(perché e^x+1 è sempre positivo, e quindi $|e^x+1| = e^x+1$)

Calcoliamo ora $\boxed{I_6 = \int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\,dx}$. Poniamo $\boxed{e^x = w}$.
Si ha: $x = \ln w$,
$x'(w) = D(\ln w) = \frac{1}{w}$, $\boxed{dx =} x'(w)\cdot dw = \boxed{\frac{1}{w}\cdot dw}$,
$e^{-x} =$ (proprietà delle potenze...) $= \frac{1}{e^x} = \frac{1}{w}$. Pertanto,

$$\boxed{I_6 =} \int \frac{\cancel{w}}{w+\frac{1}{w}}\cdot\frac{1}{\cancel{w}}\,dw = \int \frac{1}{\frac{w^2+1}{w}}\,dw = \int \frac{w}{w^2+1}\,dw =$$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2w}{w^2+1}\,dw$ (abbiamo moltiplicato per 2 dentro il segno di integrale e per $\frac{1}{2}$ fuori dal segno di integrale, così, nell'espressione $\int \frac{2w}{w^2+1}\,dw$, il numeratore è la derivata del denominatore, e si ha $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$) $= \frac{1}{2}\ln|w^2+1| + c = \frac{1}{2}\ln(w^2+1) + c$ (perché w^2+1 è sempre positivo) $\overset{w=e^x}{=} \frac{1}{2}\ln((e^x)^2+1) + c =$ (proprietà delle potenze)

$$= \boxed{\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + c}$$

INTEGRALE DI e^{-x} : $\boxed{I_7 = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c}$

IMPORTANTISSIMO

N.B.: Questo integrale può essere visto SIA COME INTEGRALE "QUASI IMMEDIATO" SIA COME INTEGRALE PER SOSTITUZIONE. (COLLEGAMENTO PROFONDO)

Vediamolo prima come integrale quasi immediato. La formula è

$$\boxed{\int \varphi'(w(x))\cdot w'(x)\,dx = \varphi(w(x)) + c = (\varphi\circ w)(x) + c}$$

L'integrale "quasi immediato" (di questo tipo) si fa quando c'è la MOLTIPLICAZIONE di un'espressione che contiene una certa funzione di w (ossia una funzione φ' di una funzione w) e la derivata w' della stessa funzione w.

Nel nostro caso, $e^{-x} = (e^{-x})\cdot 1$, ma la derivata di $w(x) = -x$ è -1. Allora, sia $\varphi(w) = e^{w}$ (quindi si ha $\varphi'(w) = e^{w}$), $w(x) = -x$; si fa il seguente TRUCCHETTO:

$$I_7 = -\int (-1)\cdot e^{-x}\,dx = -\int w'(x)\cdot e^{w(x)}\,dx = -\int \varphi'(w(x))\cdot w'(x)\,dx \underset{\text{(formula)}}{=} -\varphi(w(x)) + c = \boxed{-e^{-x} + c}$$, come si voleva dimostrare.

Otteniamo lo stesso risultato se si adopera l'integrazione per sostituzione. Ponendo $s = -x$, si ha $x = -s$, e quindi

$$\boxed{I_7 = \int e^{-x}\,dx} = \int e^{s}\,d(-s) = \int e^{s}\cdot(-ds)$$ (il differenziale ha le stesse proprietà della derivata, in particolare la costante moltiplicativa, nel nostro caso -1, può essere portata fuori dal segno di differenziale) $=$

$= -\int e^{s}\,ds$ (questa volta portiamo -1 fuori dal segno di integrale) $= -e^{s} + c$

$= \boxed{-e^{-x} + c}$ (a rigor di logica, sarebbe $-(e^{s} + c) = -e^{s} - c$, ma chiamare una costante (additiva), cioè un numero reale, c oppure $-c$ non cambia nulla). Questo risultato ha moltissime applicazioni nel calcolo degli integrali, e in particolare quando si calcola $\boxed{\Gamma(1)}$, ove Γ è la funzione GAMMA, utilissima in Probabilità e Statistica.

APPLICAZIONI:

INTEGRALI GENERALIZZATI O IMPROPRI E APPLICAZIONI ALLA PROBABILITÀ E STATISTICA

L'integrale alla Riemann (o integrale definito) viene definito per funzioni <u>LIMITATE</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definite in un intervallo $[a,b]\subset\mathbb{R}$ CHIUSO E <u>LIMITATO</u>.

Tuttavia, in diverse applicazioni (in particolare in Probabilità e Statistica) è opportuno definire un tipo di integrale per funzioni illimitate in prossimità di un punto o di un numero finito di punti e definite in intervalli limitati, oppure per funzioni definite in una semiretta o in tutto $\mathbb{R}$. Ad esempio, un'idea può essere quella di considerare una funzione illimitata in prossimità di un punto "cattivo", che sia integrabile alla Riemann (e quindi anche limitata) in ogni intervallo che non contiene il punto "cattivo" e di fare il <u>limite</u> dell'<u>integrale alla Riemann</u> quando "tendiamo ad avvicinarci" al punto "cattivo". Ad esempio, sia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ per $t\in\,]0,1]$, $f(0)=0$. Notiamo che f è integrabile alla Riemann in ogni intervallo del tipo $[x,1]$ con $0<x<1$, ed è <u>illimitata</u> in prossimità del punto 0 (tende a $+\infty$, perché $\frac{1}{0^+}=+\infty$) $(\sqrt{0}=0)$

Diremo allora che f è <u>integrabile in senso generalizzato</u> o <u>(G)-integrabile</u> in $[0,1]$ se esiste <u>in $\mathbb{R}$</u> il limite $l=\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 f(t)\,dt$. Se l non esiste, oppure $l=+\infty$ o $-\infty$, allora f <u>NON È</u> (G)-integrabile in $[0,1]$.

Nel nostro caso si ha

$$\ell = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^{1/2}}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 t^{-\frac{1}{2}}\,dt =$$

(Applichiamo la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale)

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_x^1 = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_x^1 = \lim_{x\to 0^+} \left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_x^1 =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \Big(2 - 2\underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{\to 0}\Big) = \lim_{x\to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{x}\right) = 2.$$ Siccome 2 è un numero reale, allora la funzione $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{per } t \in]0,1] \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases}$ <u>è</u> (G)-integrabile in $[0,1]$.

Analogamente, per funzioni f definite in una semiretta del tipo $[a,+\infty[$ (oppure $]-\infty,b]$) e integrabili alla Riemann in ogni intervallo (chiuso e) limitato contenuto nel dominio di definizione di f, si prenderà il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\,dt\right).$$ Se questo limite esiste <u>in $\mathbb{R}$</u>, allora diremo che f è <u>integrabile in senso generalizzato</u> (o <u>improprio</u>), o (G)-integrabile, in $[a,+\infty[$ ($]-\infty,b]$); se invece non esiste, oppure è $+\infty$ o $-\infty$, allora f <u>non è</u> (G)-integrabile in $[a,+\infty[$ ($]-\infty,b]$).

Esempio: Sia $f: [1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t^2}$. Si ha:

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} \frac{1}{t^2}\,dt =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} t^{-2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^x$$ (qui si usa la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale) $$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}+1\right) = -\frac{1}{+\infty}+1 = 0+1 = 1.$$

Siccome 1 è un numero <u>reale</u>, allora f è (G) integrabile in $[1,+\infty[$.

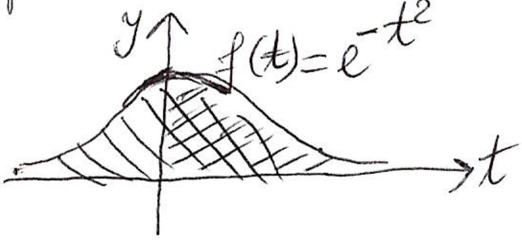
VENIAMO ORA ALLE APPLICAZIONI ALLA PROBABILITÀ E STATISTICA

- The probability integral
- Funzione Gamma (Γ) e generalizzazione del fattoriale
- Distribuzione normale o di Gauss (con esempio del tiro al bersaglio)

"THE PROBABILITY INTEGRAL"

ossia "L'INTEGRALE DELLA STATISTICA"

In Probabilità e Statistica e in tantissime applicazioni, riveste fondamentale importanza "THE PROBABILITY INTEGRAL", cioè



$$\boxed{I=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$\left(\text{ove } \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)$, oppure, equivalentemente,

$$\boxed{K=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}}\quad\left(\text{ove } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\lim_{y\to-\infty}\int_y^0 e^{-t^2}\,dt+\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)$$

Infatti, tenendo presente il significato geometrico dell'integrale, I è l'area della zona tratteggiata in ////, mentre K è l'area della zona tratteggiata in \\\\. Poiché il grafico della funzione $f(t)=e^{-t^2}$ è simmetrico rispetto all'asse y, allora si ha: $K=2I$, quindi da $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ si deduce

$$K=2\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}.$$

Ora definiamo la FUNZIONE GAMMA, molto utile e importante in Probabilità e Statistica, e vedremo che è una <u>generalizzazione del fattoriale</u>.

FATTORIALE $n!$, si legge "enne fattoriale"

Si definisce, per convenzione: $0! = 1$, $1! = 1$.

Se n è un <u>intero</u>, $n \geq 2$, si definisce FATTORIALE di n il PRODOTTO DEI primi n numeri interi positivi, cioè $2! = 1 \cdot 2 = 2$ $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $\boxed{4!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 4 = \underbrace{6}_{3!} \cdot 4 = \boxed{24}$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot 5 = \underbrace{24}_{(=4!)} \cdot 5 = 120$, ...,

$$\boxed{n!} = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots (n-1)}_{\text{prodotto dei primi } n-1 \text{ numeri interi positivi}} \cdot n = \boxed{(n-1)! \cdot n}$$

$$\boxed{(n+1)!} = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n}_{\text{prodotto dei primi } n \text{ numeri interi positivi}} \cdot (n+1) = \boxed{n! \cdot (n+1)}$$

Sussistono quindi le importantissime <u>FORMULE DI RICORRENZA</u> $\boxed{n! = (n-1)! \cdot n}$ $\boxed{(n+1)! = n! \cdot (n+1)}$ usando le quali è possibile calcolare $n!$ conoscendo il valore di $(n-1)!$ e calcolare $(n+1)!$ conoscendo il valore di $n!$ Questo, in realtà, è quello che facciamo di fatto quando scriviamo $5! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot 5 = 4! \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$, perché partiamo dal fatto che <u>già conosciamo</u> il valore di $4!$ (che è 24), e poi ci ricaviamo il valore di $5!$

Definizione di FUNZIONE GAMMA.

Per ogni $t>0$, definiamo

$$\Gamma(t)=\int_0^{+\infty} x^{t-1}\cdot e^{-x}\,dx$$

dove l'integrale è inteso in senso generalizzato, cioè

$$\Gamma(t)=\lim_{y\to+\infty}\int_0^{y} x^{t-1}\cdot e^{-x}\,dx$$

Si può vedere che $\Gamma(t)$ è ben definito per ogni $t>0$, ma noi non facciamo la dimostrazione.

Ora facciamo vedere che la funzione Γ ~~è~~ una generalizzazione del fattoriale, usando le seguenti due proprietà:

a) $\Gamma(1)=1\,(=0!)$

b) (FORMULA DI RICORRENZA) $\boxed{\Gamma(t+1)=t\cdot\Gamma(t)}$ per ogni $t>0$

a) Si ha: $\boxed{\Gamma(1)}=\int_0^{+\infty} x^{1-1}\cdot e^{-x}\,dx=\int_0^{+\infty} \underbrace{x^0}_{=1}\cdot e^{-x}\,dx=\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx}.$

Teniamo conto del fatto che $\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}+C$.

Per la **Formula** Fondamentale del Calcolo Integrale, si ha:

$$\boxed{\Gamma(1)}=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=\lim_{y\to+\infty}\int_0^{y} e^{-x}\,dx=\lim_{y\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^{y}=$$

$=\lim_{y\to+\infty}\left(-e^{-y}-(-e^0)\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(-e^{-y}+1\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(-e^{-y}\right)+$
$+\lim_{y\to+\infty}1$ (il limite della somma è uguale alla somma dei limiti, e il limite di una costante è uguale a quella costante stessa) $=-e^{-\infty}+1=$
$=0+1=\boxed{1}$ (perché $e^{-\infty}=0$, in quanto $\lim_{y\to-\infty}e^{y}=0$ (funzione esponenziale...). Pertanto a) è provato.

Dimostriamo ora

b) $\boxed{\Gamma(t+1) = t\cdot\Gamma(t)}$ per ogni $t>0$.

Per ogni $t>0$, si ha: $\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^{t\cancel{+1-1}}\cdot e^{-x}\,dx$, in quanto $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}\cdot e^{-x}\,dx$. (abbiamo messo $t+1$ al posto di t)

Ora calcoliamo intanto l'integrale indefinito $\int x^t\cdot e^{-x}\,dx$. Si tratta ~~dell~~ dell' integrale di un prodotto, e quindi usiamo la formula di integrazione per parti. Prendiamo come fattore "facile da derivare" x^t, perché $D(x^t)=t\cdot x^{t-1}$ e cercheremo di ricondurci alla quantità $\Gamma(t)$, in quanto qui $t-1$ compare all'esponente. Prendiamo come fattore "facile da integrare" e^{-x}, in quanto sappiamo già che $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}+c$.
Quindi scriveremo $\int x^t\cdot e^{-x}\,dx = \int x^t\cdot(-e^{-x})'\,dx = \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$ e applichiamo la formula di integrazione per parti

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

con $f(x)=x^t$, $f'(x)=t\cdot x^{t-1}$, $g(x)=-e^{-x}$, $g'(x)=e^{-x}$:

$(\triangle\triangledown)$ $\int x^t\cdot e^{-x}\,dx = \int x^t\cdot(-e^{-x})'\,dx = -x^t\cdot e^{-x} - \int t x^{t-1}\cdot(-e^{-x})\,dx = -x^t\cdot e^{-x} + t\int x^{t-1}e^{-x}\,dx$ (l'ultimo addendo, "integrato" fra 0 e $+\infty$, sarà proprio $t\cdot\Gamma(t)$; t è una costante moltiplicativa (perché è una quantità fissata che non dipende da x), e quindi è stata portata fuori dal segno di integrale). Ora, integrando $(\triangle\triangledown)$ da 0 a $+\infty$ (procedendo similmente a quando si usa la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale), si ha

$$\boxed{\Gamma(t+1)} = \int_0^{+\infty} x^t\cdot e^{-x}\,dx = \left[-x^t\cdot e^{-x}\right]_0^{+\infty} + t\cdot\int_0^{+\infty} x^{t-1}\cdot e^{-x}\,dx =$$

$$= 0 + t\cdot\Gamma(t) = \boxed{t\cdot\Gamma(t)},$$

purché dimostriamo che $\left[-x^t \cdot e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 0$.
Ma che cosa vuol dire? Si ha:

$$\left[-x^t \cdot e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \lim_{y \to +\infty} \left[-x^t \cdot e^{-x}\right]_0^{y} = \lim_{y \to +\infty} \left(-y^t \cdot e^{-y} - \underbrace{0^t \cdot e^0}_{=0}\right) = \lim_{y \to +\infty} \left(-y^t \cdot e^{-y}\right) = -(+\infty)^t \cdot e^{-\infty} =$$

$= (-\infty) \cdot 0$, in quanto $(+\infty)^{\text{esponente positivo}} = +\infty$, sappiamo che $t > 0$, ed inoltre $e^{-\infty} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$ per le proprietà della funzione esponenziale. Dunque, $(-\infty) \cdot 0$ è una forma indeterminata, <u>ma</u> l'<u>esponenziale</u> <u>è più</u> <u>veloce</u>, quindi "vince" $e^{-\infty}$ che fa 0, e pertanto

$\left[-x^t \cdot e^{-x}\right]_0^{+\infty}$ viene ad essere uguale a 0, e dunque la formula di RICORRENZA b) di 1/2 pagine indietro è completamente dimostrata.

Ora, calcoliamo $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$, $\Gamma(4)$, ... tenendo conto che

a) $\Gamma(1) = 1$ $(= 0!)$

b) $\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t)$ per ogni $t > 0$ (<u>RICORRENZA</u>)

Iniziamo con $\Gamma(2)$. Si ha: $\Gamma(2) = \Gamma(1+1)$. La formula b) vale <u>per ogni</u> $t > 0$, quindi <u>anche</u> quando $t = 1$. Se nella b) ci mettiamo 1 al posto di t, si ottiene $\Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \cdot 1 = 1$, in quanto già sappiamo che $\Gamma(1) = 1$. Dunque, $\boxed{\Gamma(2) = 1}$.

Ora, sapendo che $\boxed{\Gamma(2) = 1}$, calcoliamo $\Gamma(3)$, scrivendo $\boxed{3 = 2+1}$. La formula b) vale per ogni $t > 0$, quindi anche per $t = 2$. Sostituendo t con 2 nella b), si ottiene

$\boxed{\Gamma(3)} = \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1$ (perché $\Gamma(2) = 1$) $= \boxed{2} = \boxed{2!} = 1 \cdot 2$

Dunque, $\boxed{\Gamma(3) = 2}$. Ora, sapendo questo, calcoliamo $\Gamma(4)$ $4 = \boxed{3} + 1$, e allora prenderemo $t = 3$ nella b). Sostituendo t con 3 nella b), si ha

$\boxed{\Gamma(4)} = \Gamma(3+1) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{3!} = \boxed{6}$ (perché $\Gamma(3) = 2$).

Sapendo che $\Gamma(4) = 3!$, calcoliamo $\Gamma(5)$: $5 = 4+1$, e nella b) sostituiamo t con 4; si ha

$\boxed{\Gamma(5)} = \Gamma(4+1) = 4 \cdot \Gamma(4) = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{4!} = 24$. Più in generale, si ha

$$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!} \qquad \boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

Ora ci proponiamo di definire il fattoriale, $t!$, per ogni $t>0$ (non necessariamente intero). Siccome abbiamo visto che $\boxed{n! = \Gamma(n+1)}$ per ogni intero positivo n (~~ed~~ anche per $n=0$), è naturale definire

(X) $\boxed{t! = \Gamma(t+1)}$ per ogni $t>0$:

questa sarà la definizione del fattoriale per ogni numero reale positivo t.

Ora vogliamo calcolare $\left(\frac{1}{2}\right)!$

Dalla definizione (X), $\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

quindi bisognerebbe calcolare direttamente $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$. Siccome ciò può essere alquanto difficile da un punto di vista "tecnico", allora calcoliamo dapprima $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ (che si riconduce al "probability integral")

e poi applicheremo di nuovo la formula di ricorrenza

b) $\Gamma(t+1) = t\cdot\Gamma(t)$ questa volta usata con $t=\frac{1}{2}$

ottenendo $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

una volta calcolato $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Ricordiamo che $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}\cdot e^{-x}\,dx$ per ogni $t>0$. Sostituendo t con $\frac{1}{2}$, si ottiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1}\cdot e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{1/2}}\cdot e^{-x}\,dx =$$

(proprietà delle potenze) $= \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot e^{-x}\,dx$. Per sostituzione, poniamo $\boxed{\sqrt{x} = w}$.

Si ha: $x = w^2$, e ricordando la formula $\boxed{dx = \frac{dx}{dw}dw = x'(w)\,dw}$ e dato che $x'(w) = 2w$, si ha $\boxed{dx = 2w\cdot dw}$. Sostituendo, si ha:

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{\cancel{w}}e^{-w^2}\,2\cancel{w}\,dw = 2\int_0^{+\infty} e^{-w^2}\,dw$ (la costante 2 si porta fuori dall'integrale)

$= 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$ (per il probability integral). Infine $\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)!} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

Abbiamo calcolato $\boxed{(1/2)!}$

(N.B.: Nell' integrazione per sostituzione bisogna anche "sostituire" gli estremi rispetto alla variabile x con gli estremi rispetto alla variabile w. Ma, nel nostro caso, gli estremi <u>NON</u> si dovevano sostituire, perché sono sempre gli stessi!!! Siamo quindi davanti a un caso "fortunato": infatti x varia tra 0 e $+\infty$, ma $w = \sqrt{x}$, e quindi anche w varia tra 0 e $+\infty$.)

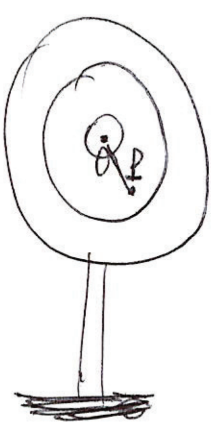
Veniamo ora alla **DISTRIBUZIONE NORMALE** o <u>GAUSSIANA</u>, che introdurremo attraverso un esempio, che chiameremo "ESEMPIO DEL TIRO AL BERSAGLIO" ~~oppure~~ "DEL TIRO A SEGNO"

Diremo che una funzione f definita su tutto $\mathbb{R}$ e che assume valori non-negativi è una <u>densità di probabilità</u> se $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1}$, ove con questo integrale si intende il (G)-integrale (cioè in senso <u>generalizzato</u>), vale a dire, per <u>definizione</u>:

$$(G)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = (G)\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + (G)\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{y\to-\infty} (R)\int_{y}^{0} f(t)\,dt + \lim_{x\to+\infty} (R)\int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

(ove il simbolo $(R)\int_a^b$ sta a indicare l'integrale alla Riemann, e il simbolo (G) prima dell'integrale indica l'integrale in senso generalizzato)

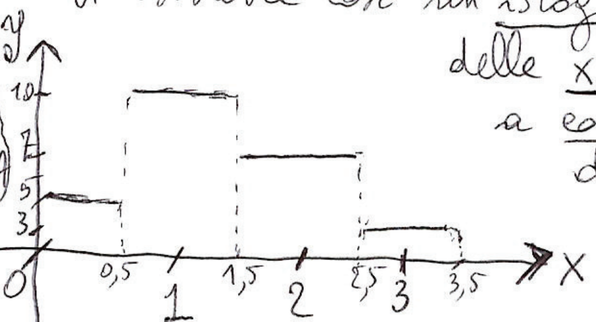
ESEMPIO DEL TIRO AL BERSAGLIO



Lanciamo una freccia (tiro a segno). La freccia si posiziona sul punto P. Facciamo diversi tiri. La quantità "casuale" da valutare, che si chiama VARIABILE ALEATORIA e si indica con X, è la distanza dal punto P dal centro del bersaglio O. Facendo tantissimi tiri, avremo tantissimi dati della distanza $\overline{OP}$. Ora RAGGRUPPIAMO i nostri dati in varie classi. Classe 0: $X = \overline{OP}$ varia (per esempio) da 0 a 0,5 cm (estremi inclusi). Classe 1: la distanza $\overline{OP}$ varia da 0,5 cm (escluso) a 1,5 cm (compreso), e quindi il punto 1 (cioè, diciamo, quel punto che corrisponde a 1 cm) è il "centro" della classe 1. Classe 2: la distanza $\overline{OP}$ varia da 1,5 cm (escluso) a 2,5 cm (compreso), e quindi 2 sarà il "centro" della classe 2.

Si costruisce così un istogramma, in cui sull'asse delle x si mettono le CLASSI associate a come si approssima la distanza $\overline{OP}$, e sull'asse delle y si mette il rapporto tra il NUMERO dei tiri in cui la distanza $\overline{OP}$ è in quella classe considerata e il NUMERO TOTALE dei tiri. Questo rapporto si chiama FREQUENZA RELATIVA della classe considerata, e il numero dei tiri per i quali la distanza $\overline{OP}$ è nella classe si chiama FREQUENZA ASSOLUTA della classe.

Figura dell' ISTOGRAMMA



Esempio: Facciamo 25 tiri (n = numero totale di tiri = 25)
Supponiamo che, in tutti questi tiri, la distanza $\overline{OP}$ della freccia dal centro del bersaglio sia inferiore a 3,5 cm e che abbiamo avuto:

5 tiri tali che $\overline{OP}$ sia nella classe 0
10 tiri " " nella classe 1
7 tiri " " nella classe 2
3 tiri " " nella classe 3

Le quantità "numero di tiri con cui $\overline{OP}$ è nella classe 0, 1, 2, 3" sono le FREQUENZE ASSOLUTE delle classi 0, 1, 2, 3 e la loro somma è 25, cioè n, ossia il NUMERO TOTALE DEI TIRI. Le quantità

$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ (cioè $\frac{5}{n}$), $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ (cioè $\frac{10}{n}$), $\frac{7}{25}$ (cioè $\frac{7}{n}$), $\frac{3}{25}$ (cioè $\frac{3}{n}$), si chiamano FREQUENZE RELATIVE, E LA LORO SOMMA FA 1 $\left(= \frac{25}{25}\right)$. Si preferisce indicare sull'asse delle y le frequenze relative proprio perché LA SOMMA DELLE FREQUENZE RELATIVE è SEMPRE UGUALE AD 1. Notiamo che le frequenze relative delle classi sono le probabilità che la freccia finisca in un punto P tale che la distanza $\overline{OP}$ sia in quella classe: infatti la probabilità (per definizione) di una classe è uguale al rapporto "$\frac{\text{numero dei casi favorevoli a quella classe}}{\text{numero di tutti i casi possibili}}$" =

$$= \frac{\text{numero dei tiri tali che la distanza } OP \text{ è in quella classe}}{\text{numero totale dei tiri}} =$$

= frequenza RELATIVA di quella classe.

Questo è un **IMPORTANTISSIMO COLLEGAMENTO PROFONDO FRA LA PROBABILITÀ E LA FREQUENZA RELATIVA.**

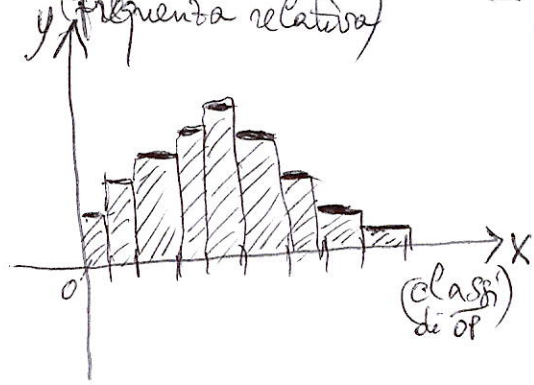
Quindi, il nostro istogramma è un'approssimazione della rappresentazione del fenomeno che descrive, in un certo senso, "quanti" tiri sono tali che la distanza $\overline{OP}$ (dal centro O del punto P in cui va a finire la freccia abbia un determinato valore. L'approssimazione della distanza $\overline{OP}$ è data dalla corrispondente classe.

Consideriamo la quantità n (numero totale dei tiri) sempre più grande (quindi FACCIAMO TENDERE IL NUMERO TOTALE DEI TIRI A $+\infty$).

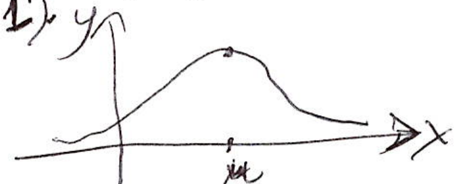
Per avere un'approssimazione sempre più precisa della descrizione del fenomeno (che dovrebbe indicare il rapporto tra il numero dei tiri in cui la corrispondente distanza $\overline{OP}$ abbia un ben determinato valore ed il numero totale dei tiri), DIMINUIAMO L'AMPIEZZA DELLE CLASSI. Per esempio: Invece di "approssimare" $\overline{OP}$ con $0, 1, 2, 3, \dots$, si può "approssimare" la distanza $\overline{OP}$ con $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots$

(quindi, ad esempio: classe 0: da 0 a $\frac{1}{4}$ compreso
classe $\frac{1}{2}$: da $\frac{1}{4}$ escluso a $\frac{3}{4}$ compreso
classe 1: da $\frac{3}{4}$ escluso a $\frac{5}{4}$ compreso
classe $\frac{3}{2}$: da $\frac{5}{4}$ escluso a $\frac{7}{4}$ compreso
classe 2: da $\frac{7}{4}$ escluso a $\frac{9}{4}$ compreso)

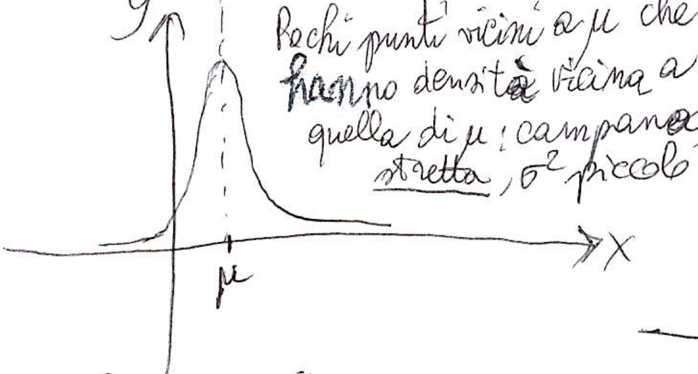
e poi, successivamente, "approssimare" $\overline{OP}$ con $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2, \dots$ in modo tale da avere una descrizione sempre più precisa del fenomeno dell'andamento dei tiri.



Facciamo tendere a 0 l'"ampiezza delle classi", cioè facciamo tendere a +∞ il "numero delle classi", cioè il numero delle "approssimazioni" della distanza $\overline{OP}$. Si ottiene quindi un istogramma che descrive con sempre maggiore precisione l'andamento dei tiri. All'istogramma considerato è associata la funzione "a scalini" che rappresenta l'andamento delle frequenze relative corrispondenti alle varie classi: è una funzione non-negativa o positiva, a cui è associata la somma delle aree dei corrispondenti rettangolini. Che cosa si ottiene al limite? Se la distanza $\overline{OP}$ varia all'interno di un intervallo limitato, diciamo $[0,b]$, si ottiene "il limite delle somme delle aree dei rettangolini". Ma questo che cos'è? L'abbiamo studiato all'inizio di questa dispensa: SI OTTIENE L'INTEGRALE ALLA RIEMANN (!!!) Di che cosa? Della funzione densità di probabilità (che vedremo con un esempio avere integrale 1 e che ha sempre integrale 1 perché LA SOMMA DELLE FREQUENZE RELATIVE È 1). PERCHÉ? Perché, "al limite", la funzione "a scalini" rappresentata dall'istogramma tende ad essere



una funzione a forma di curva a campana (questo è per così dire un risultato "empirico", "sperimentale", che in Statistica si chiama TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE) (senza dim.): questa funzione a forma di campana è la funzione densità di probabilità $f(t)$, non negativa e tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. N.B.: Siccome $\overline{OP}$ può avere (teoricamente) valori "vicini" a +∞, allora in Statistica si prende L'INTEGRALE GENERALIZZATO invece di quello alla Riemann; ma sostanzialmente, nel "passaggio al limite" delle somme delle aree dei rettangolini, l'integrale generalizzato si comporta analogamente come quello alla Riemann.



La nostra "curva a campana" è il grafico della funzione densità di probabilità $f(t)$. Nel caso di CURVA A CAMPANA, la nostra curva (o la nostra densità) si chiama DISTRIBUZIONE NORMALE, o GAUSSIANA o DI GAUSS ed è caratterizzata da due parametri (μ, σ^2): μ si chiama "media" oppure "valor medio", e indica il punto di massimo (assoluto) della funzione densità, cioè il punto in corrispondenza del quale abbiamo frequenze maggiori dei nostri dati, cioè dei valori assunti dalla nostra variabile aleatoria X (che nel nostro esempio è la distanza OP della freccia dal centro del bersaglio). Notiamo che il grafico della nostra funzione densità è simmetrico rispetto alla retta verticale $x=\mu$. Il parametro σ^2 si chiama "varianza", mentre il parametro $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$ (prendendo il valore positivo della radice quadrata) si chiama scarto quadratico medio oppure deviazione standard. La varianza esprime, in un certo senso, la "dispersione" dei valori della nostra densità rispetto al valore della densità corrispondente al valor medio μ, cioè esprime quanto è possibile trovare (sull'asse delle x) dei punti abbastanza lontani da μ che abbiano comunque densità vicino a quella di μ [ossia, detto in un modo molto semplicistico, "quanto ci si allontana dal valor medio μ"]. Nelle due figure all'inizio di questa pagina si vede che, quando σ^2 è molto piccolo, si ha la "campana stretta", mentre quando σ^2 è molto grande, si ha la "campana larga". Quindi σ^2 indica, in un certo senso, l'"ampiezza della campana".

Si parlerà quindi di DISTRIBUZIONE NORMALE o GAUSSIANA ~~o~~ DI GAUSS di parametri μ, σ^2, che si indica con il simbolo $\boxed{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}$.

Nella distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, la funzione densità f è data da

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Nel caso particolare $\mathcal{N}(0,1)$ (che è molto studiato in letteratura e i cui valori sono "tabulati", cioè sono presenti in apposite tabelle), la funzione densità f è data da

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

(basta mettere 0 al posto di μ ed 1 al posto di σ^2, oppure 1 al posto di σ, il che è la stessa cosa).

Nella prossima pagina dimostriamo che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$, per semplicità lo facciamo solamente nel caso particolare $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

Ora consideriamo la densità che corrisponde alla distribuzione normale $\mathcal{N}(0,1)$:
$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ e dimostriamo che

$$\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1}$$

cioè che f è <u>veramente</u> una funzione <u>densità</u>.

Vogliamo ricondurci al "probability integral" $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} dw$ e quindi vogliamo fare una sostituzione in modo tale che al posto di $-\frac{t^2}{2}$ ci sia $-w^2$.

Deve essere quindi $-\frac{t^2}{2} = -w^2$, cioè $\frac{t^2}{2} = w^2$. Poniamo allora $\boxed{w = \frac{t}{\sqrt{2}}}$. Notiamo che, siccome t varia tra $-\infty$ e $+\infty$, allora anche w varia tra $-\infty$ e $+\infty$. Adesso dobbiamo sostituire dt con un'espressione che comprende <u>solamente</u> dw e termini contenenti solo la w, ma non la t. Si ha:

$t = w \cdot \sqrt{2}$, $\boxed{dt} = \frac{dt}{dw} \cdot dw = \boxed{t'(w) \cdot dw} = \sqrt{2}\, dw$, e quindi
$t'(w) = \sqrt{2}$,

$$\boxed{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2} \cdot \cancel{\sqrt{2}}\, dw =$$

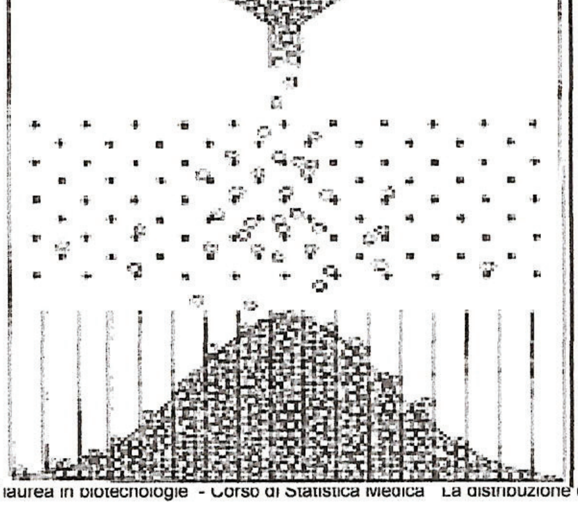
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} dw = \text{(in virtù del "PROBABILITY INTEGRAL")}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \cdot \cancel{\sqrt{\pi}} = \boxed{1}$$, come si voleva dimostrare.

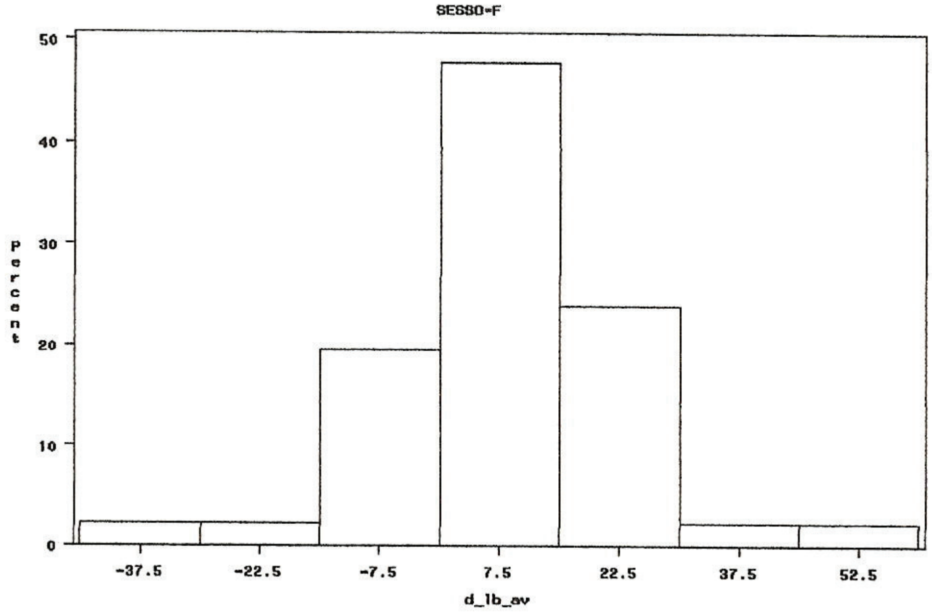
-40- "SCHEDA:"

La distribuzione Gaussiana o normale

- È la distribuzione di probabilità che meglio rappresenta molte variabili biologiche
- E' la distribuzione di probabilità degli errori casuali
- E' la distribuzione di probabilità delle statistiche campionarie
- E' la distribuzione limite per altre distribuzioni di probabilità quando n $\rightarrow \infty$



Distribuzione delle differenze tra glicemia misurata al polpastrello ed all'avambraccio

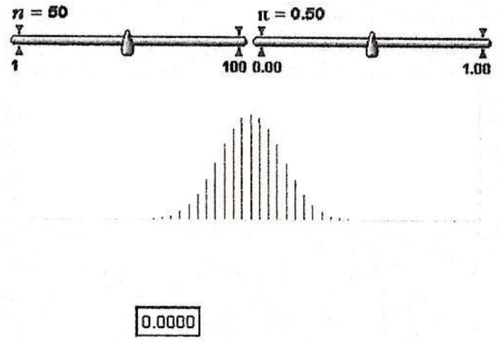


La distribuzione Gaussiana

- È la distribuzione di probabilità che meglio rappresenta molte variabili biologiche
- E' la distribuzione di probabilità degli errori casuali
- E' la distribuzione di probabilità delle statistiche campionarie
- E' la distribuzione limite per altre distribuzioni di probabilità quando n $\rightarrow\infty$

About th
0. Prefac
1. Introd
2. Displa
3. Bivari
4. Time S
5. Categ
6. Sampl
1 Pop
2 Infl
3 Prob
4 Vari
5 Dist
6 Nor
7 Dist
8 Sam
7. Desig
8. Estim
9. Testin
10. Comp
11. Regre
12. Indep
13. Analy
Index
Datasets

Shape of the binomial distribution



Observe that

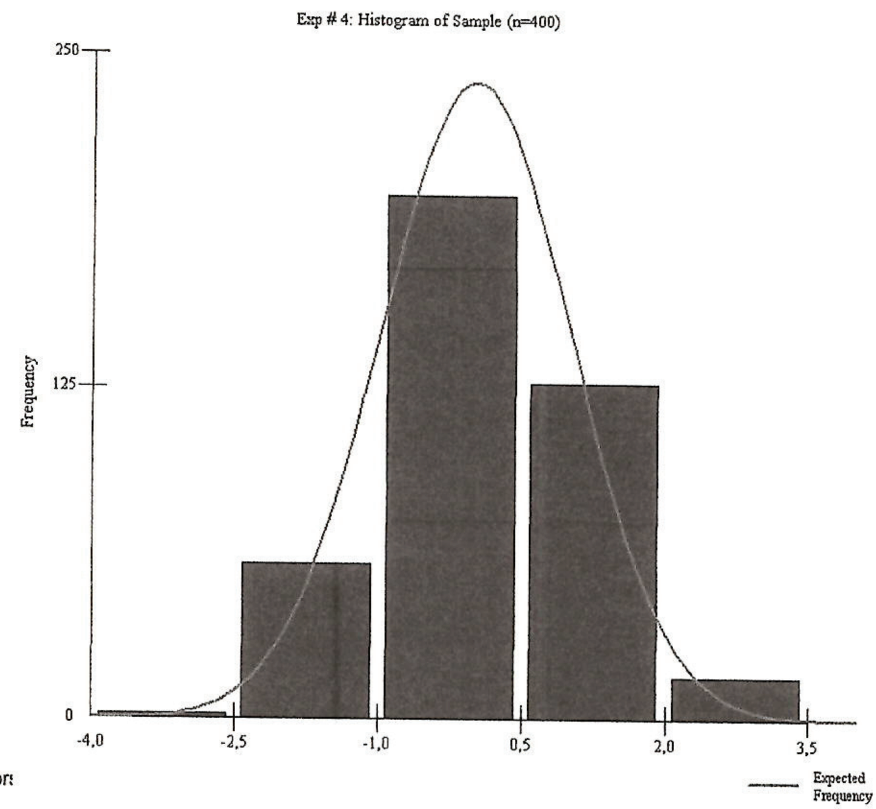
The distribution of P is centred on π.

The spread decreases as n increases.

It is symmetric when $\pi = 0.5$, but becomes more skew as π approaches 0 or 1.

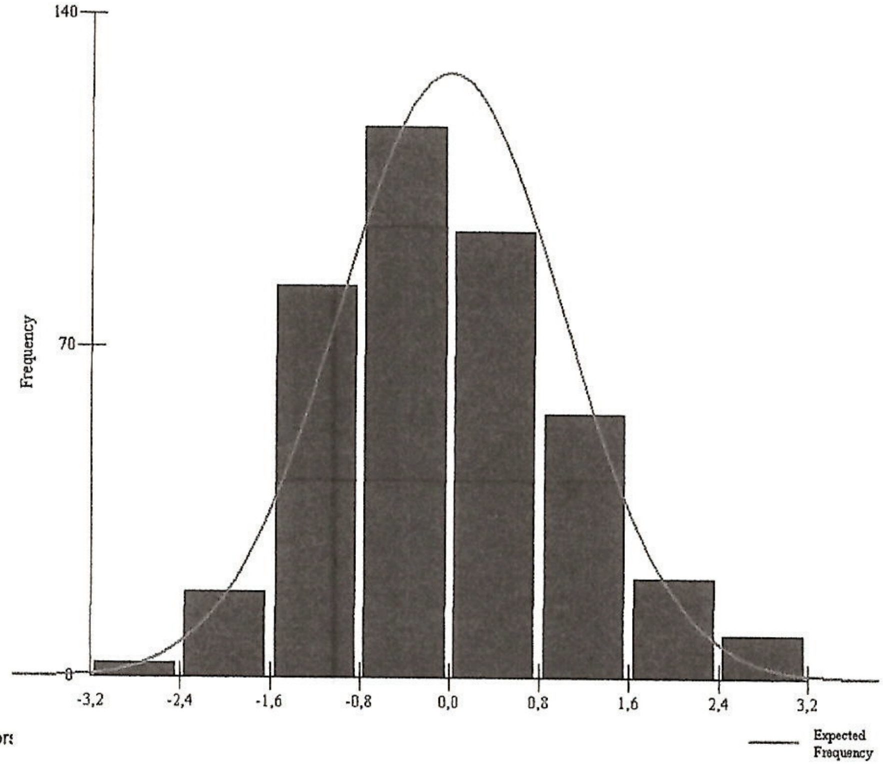
- La distribuzione gaussiana come modello di una distribuzione di probabilità empirica

- Es. istogramma che descrive la distribuzione di frequenza di una variabile numerica in un gruppo di 400 soggetti:



- Aumento progressivamente la suddivisione dell'istogramma:

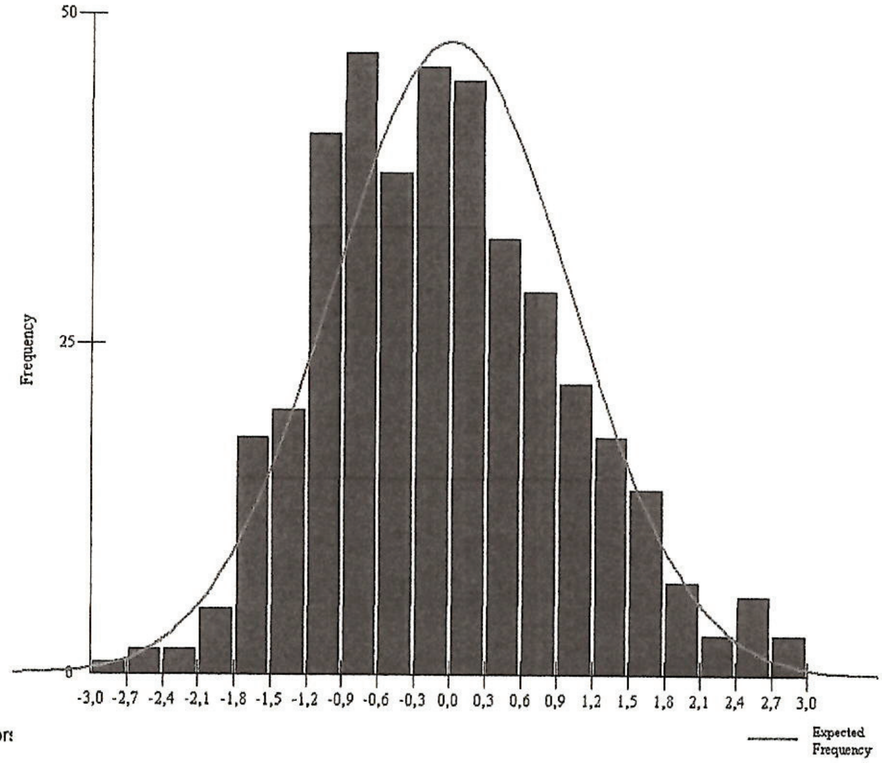
Exp # 5: Histogram of Sample (n=400)



Cor

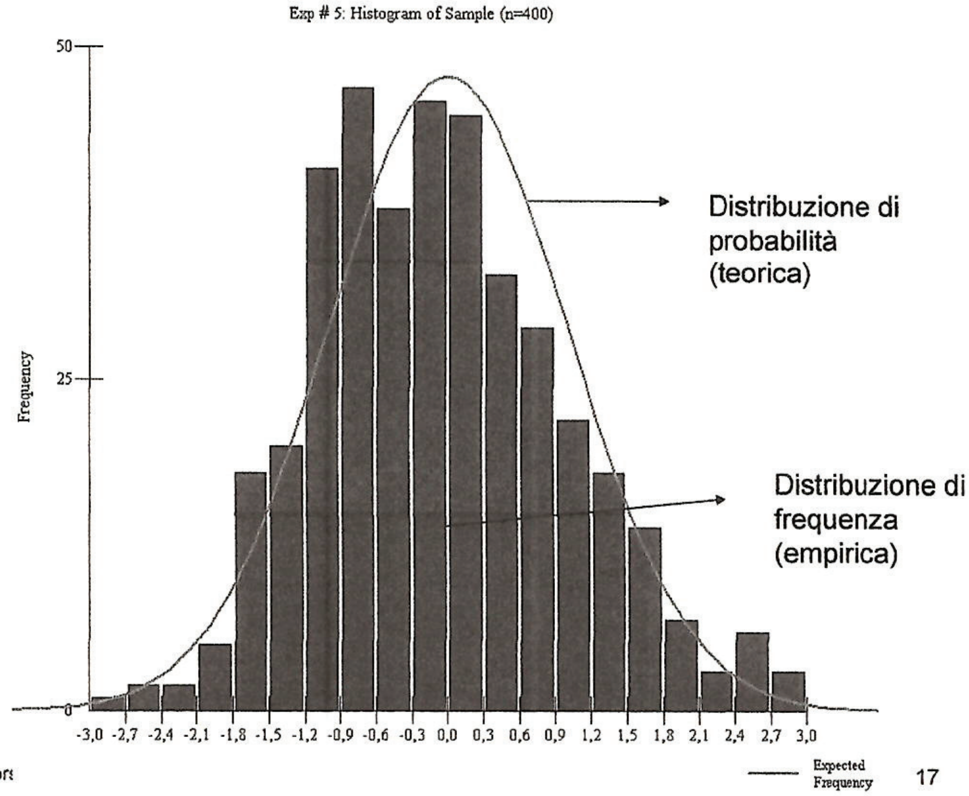
15

Exp # 5: Histogram of Sample (n=400)

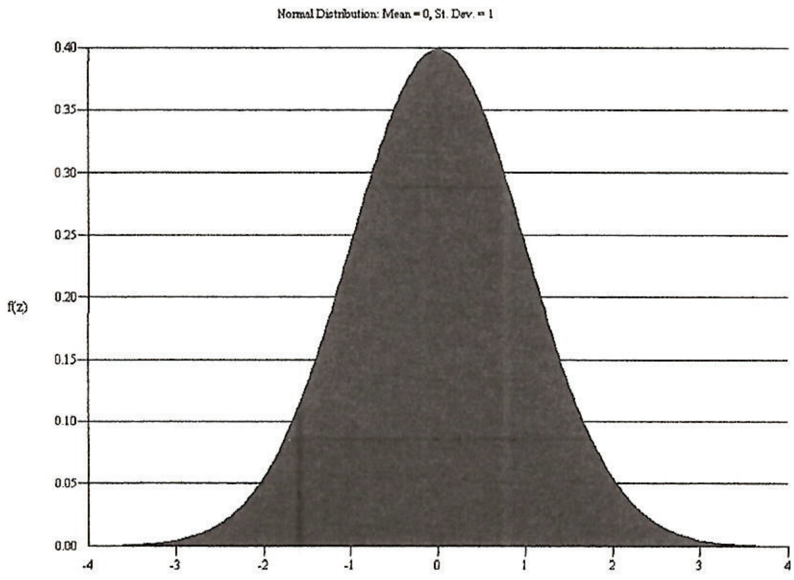


Cor

16



La forma della distribuzione di probabilità normale



-46-

La formula della distribuzione normale.

E' definita da Media (μ) e Deviazione Standard (σ)

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) * \exp \frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

La distribuzione gaussiana o "normale" comprende una famiglia di curve, i cui parametri sono Media (μ) e Deviazione Standard (σ)

Media (μ): posizione centrale

Deviazione Standard (σ): 'ampiezza' della curva

Il grafico seguente mostra due curve normali con DS=1 (curva stretta ~~nera~~) e DS=2 (campana larga c. ~~rossa~~). Entrambe hanno media=0.